

ANTONI MILER

## WYMIAR FRAKTALNY SIECI RZECZNYCH W MAŁYCH ZLEWNIACH WIELKOPOLSKI

*Z Katedry Melioracji Rolnych i Leśnych  
Akademii Rolniczej w Poznaniu*

**ABSTRACT.** The definitions of fractal and fractal dimension, fractal properties are presented. An original method to define formula of river network fractal dimension is worked out. Relationship among calculated fractal dimensions of river networks (D), the coefficients of hydrographic network density (ND) and minima of specific discharges (SNq) in the catchments of Wielkopolska region are examined.

**Key words:** hydrology, hydrographic network, fractal dimension

### Wstęp

Obecna struktura sieci rzecznych jest wynikiem ich ewolucyjnego rozwoju. Generalnie zadaniem sieci rzecznej jest efektywne odprowadzanie przestrzennie rozłożonego opadu z danej powierzchni utożsamianej z pewną zlewnią. Układ i gęstość sieci rzecznej są w ścisłym związku z parametrami klimatycznymi (opady atmosferyczne, temperatura powietrza) i fizjograficznymi zlewni (ukształtowanie terenu, budowa geologiczna, roślinność). Pewne regularności i prawidłowości w budowie sieci rzecznych były podstawą jakościowych klasyfikacji (układy: dendryczne, kratowe, promieniste,

równoległe, pierścieniowe, prostokątne, choinkowe, chaotyczne, subrównoległe, skrzywione, subdendryczne i anastomatyczne) oraz wprowadzenia ilościowych metod opisu (rozkłady prawdopodobieństwa populacji sieci rzecznych przy określonej liczbie punktów źródłowych i tzw. prawa Hortona – prawa bifurkacji, długości, spadków i powierzchni zlewni cieków kolejnych rzędów) (Eagleson 1970).

Prezentowany w niniejszej pracy wymiar fraktalny sieci rzecznej jest parametrem morfometrycznym łączącym w sobie zalety klasyfikacji jakościowych i ilościowych.

### Pojęcie fraktala i wymiaru fraktalnego

Termin fraktal został wprowadzony przez Mandelbrota (1983) i zdefiniowany pierwotnie jako zbiór, którego wymiar Hausdorffa-Besicovitcha (pojemnościowy wymiar fraktalny) jest większy od wymiaru topologicznego. Następnie Mandelbrot wprowadził szerszą definicję fraktala – „Fraktalem jest kształt złożony z części podobnych w pewien sposób do całości” (Feder 1988). Pierwszą odkrytą już w 1875 roku przez H.J.S. Smitha figurą samopodobną był „kurz Cantora” (Pierański 1992). Do najbardziej znanych figur fraktalnych należą: krzywa von Kocha, dywan, uszczelka i piramida Sierpińskiego, zbiór Julii i zbiór Mandelbrota.

Fraktale charakteryzują się trzema własnościami:

– nie są określone wzorem matematycznym tylko zależnością rekurencyjną,

– mają cechę samopodobieństwa (część fraktala jest podobna do całego),

– są obiektami, których wymiar nie jest liczbą całkowitą, na przykład zbiór (kurz) Cantora ma wymiar 0,630929753, krzywa von Kocha 1,261859507, dywan Sierpińskiego 1,892789261 (Kudrewicz 1993).

Istnieją różne definicje wymiaru, na przykład wymiary Hausdorffa, Kolmogorowa, Lapunowa, informatyczny, punktowy itp. Mandelbrot traktuje wymiar jako podstawową charakterystykę fraktali. Przyjmijmy zatem, zgodnie z jego sugestią, dla opisu fraktali definicję wymiaru pojemnościowego.

Niech interesujący nas obiekt geometryczny  $F$  zawiera się w  $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Nakryjmy go zbiorem  $n$ -wymiarowych kostek o bokach równych  $\varepsilon$ . Niech  $N(\varepsilon)$  będzie minimalną liczbą kostek niezbędnych do nakrycia całego zbioru  $F$ . Wyrażenie:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (1)$$

nazywamy wymiarem pojemnościowym (definicja Kołmogorowa). Gdy obiekt geometryczny jest fraktalem,  $D$  nie jest liczbą całkowitą i nosi nazwę wymiaru fraktalnego. Zatem wymiar fraktalny jest liczbą rzeczywistą, w przeciwieństwie do intuicyjnie jasnego wymiaru topologicznego (wyrażanego liczbą naturalną) i określa stopień wypełnienia dostępnej przestrzeni przez dany fraktal.

### Wymiar fraktalny sieci rzecznej

Istnieje pogląd, iż w naturze wszystkie obiekty geometryczne mają strukturę fraktalną (Mandelbrot 1983, Feder 1988). W szczególności regularność sieci rzecznych jest podstawą hipotezy, iż sieci rzeczne są fraktalami.

Aby określić wymiar fraktalny sieci rzecznej, trzeba sformalizować jej opis topologiczny. Podstawowym elementem topologicznym jest rząd cieków, który mówi o istnieniu określonej hierarchii w sieci koryt rzecznych. Przyjmijmy za Strahlerem (Eagleson 1970) następujący algorytm przypisywania ciekom rzędów:

- wszystkie cieków, które mają punkty źródłowe są ciekami pierwszego rzędu,
- rząd cieków wychodzącego zwiększa się o jeden, gdy w punkcie węzłowym łączą się cieków równego rzędu,
- jeżeli w punkcie węzłowym łączą się cieków różnego rzędu, to ciek wychodzący zachowuje rząd cieków wyższego rzędu.

Nakryjmy sieć rzeczną zbiorem kwadratów (2-wymiarowe kostki) o boku  $\varepsilon$ . Liczbę kwadratów pokrywających cieków kolejnych rzędów można określić następująco:

rząd cieków:    liczba kwadratów pokrywających:

$$\begin{array}{ll} 1 & N_1 \cdot \bar{L}_1 / \varepsilon \\ 2 & N_2 \cdot \bar{L}_2 / \varepsilon \\ \vdots & \vdots \\ i & N_i \cdot \bar{L}_i / \varepsilon, \end{array} \quad (2)$$

gdzie:

$N_i$  – liczba cieków  $i$ -tego rzędu,

$\bar{L}_i$  – średnia długość cieków  $i$ -tego rzędu.

Zatem liczba kwadratów pokrywających sieć rzeczną  $i$ -tego rzędu ( $N$ ) wyraża się wzorem:

$$N = \sum_{l=1}^i N_l \cdot \frac{\bar{L}_l}{\varepsilon}. \quad (3)$$

Dla regularnych sieci rzecznych (spełniających prawa Hortona) wskaźnik liczby cieków  $R_B$  ma postać:

$$\frac{N_{i-1}}{N_i} \quad (\text{prawo bifurkacji}), \quad (4)$$

a wskaźnik długości cieków  $R_L$ :

$$\frac{\bar{L}_i}{\bar{L}_{i-1}} \quad (\text{prawo długości cieków}). \quad (5)$$

Związki (4) i (5) można łatwo przekształcić do postaci:

$$N_i = \frac{N_1}{R_B^{i-1}}, \quad \bar{L}_i = \bar{L}_1 \cdot R_L^{i-1}. \quad (6)$$

Podstawiając do wzoru (3) związki (6) i zakładając, iż  $\varepsilon \approx \bar{L}_1 = \frac{\bar{L}_i}{R_L^{i-1}}$  (cieki pierwszego rzędu mają na ogół zwarte zlewnie), otrzymujemy:

$$N = N_1 \cdot \frac{\left(\frac{R_L}{R_B}\right)^i - 1}{\frac{R_L}{R_B} - 1}. \quad (7)$$

Ponieważ  $R_B > R_L$  dla dużych wartości  $i$  uzyskujemy:

$$N \approx N_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_L}{R_B}} = N_1 \cdot \frac{R_B}{R_B - R_L} = \frac{R_B^i}{R_B - R_L} \quad (8)$$

$$(N_1 = R_B^{i-1} \cdot N_i, \quad N_i = 1)$$

Zatem na mocy definicji (1) wymiar fraktalny sieci rzecznej ma postać:

$$D = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (i \rightarrow \infty)}} \frac{\ln N}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (i \rightarrow \infty)}} \frac{i \cdot \ln R_B - \ln(R_B - R_L)}{(i-1) \cdot \ln R_L - \ln \bar{L}_i} = \frac{\ln R_B}{\ln R_L}. \quad (9)$$



### Wymiar fraktalny sieci rzecznych Wielkopolski

W pracy poddano analizie sieci rzeczne 32 małych zlewni Wielkopolski (o powierzchniach do 350 km<sup>2</sup>). W 8 zlewniach autor prowadził badania własne (Miler 1994), a dla 24 zlewni wykorzystano materiały hydrometryczne opublikowane w Rocznikach Hydrologicznych. Podstawę kartograficzną dla przypisania ciekom odpowiednich rzędów stanowiły mapy w skali 1:200 000 (Podział... 1980).

W tabeli 1 zestawiono zbiorczo, dla badanych zlewni, obliczone wartości: powierzchni zlewni, gęstości sieci rzecznych, średnich z minimalnych rocznych odpływów jednostkowych, wskaźników bifurkacji, wskaźników długości cieków oraz wymiarów fraktalnych sieci cieków.

Wartości wskaźników bifurkacji ( $R_B$ ) i wskaźników długości cieków ( $R_L$ ) obliczono metodą graficzną. W tym celu wykreślono odpowiednio zależności:  $\ln N_i$  od  $i$  (ryc. 1 i 2) oraz  $\ln \bar{L}_i$  od  $i$  (ryc. 3 i 4), gdzie  $N_i$  – liczba cieków  $i$ -tego rzędu,  $\bar{L}_i$  – średnia długość cieków  $i$ -tego rzędu. Zależności powyższe, zgodnie z prawami Hortona (4) i (5), były wyrównywane liniami prostymi.

Wymiar fraktalny sieci rzecznej ma podobny sens fizyczny jak wskaźnik gęstości sieci cieków. Wnosi on jednak więcej informacji, bowiem zależy również od struktury sieci rzecznej. Potwierdzeniem tego mogą być zależności regresyjne pomiędzy wymiarami fraktalnymi sieci rzecznych oraz wskaźnikami gęstości cieków a średnimi z najniższych rocznych odpływów jednostkowych (SNq) dla badanych zlewni (ryc. 5 i 6). Wybrana charakterystyka hydrologiczna – SNq jest związana ze wskaźnikiem zasilania podziemnego BFI (base flow index), a wskaźnik ten jest istotnie statystycznie skorelowany zarówno z wymiarami fraktalnymi sieci rzecznych, jak i ze wskaźnikami gęstości cieków w małych zlewniach nizinnych (Magnuszewski 1990).

### Podsumowanie i wnioski

Zastosowanie fraktali w naukach przyrodniczych jest dopiero w początkowym stadium rozwoju. Pod koniec lat osiemdziesiątych zaczęły ukazywać się pierwsze prace poświęcone wymiarowi fraktalnemu sieci rzecznych (m.in. Tarboton i in. 1988, Nikora 1991, Liu 1992, Magnuszewski 1993).

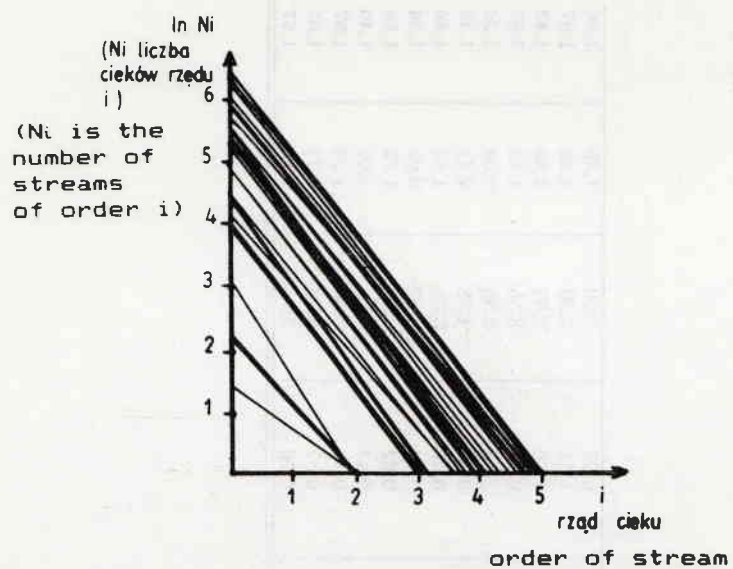
W niniejszej pracy podano definicję fraktala i wymiaru fraktalnego, przedstawiono podstawowe własności fraktali, podano własne wyprowadze-

Tabela 1

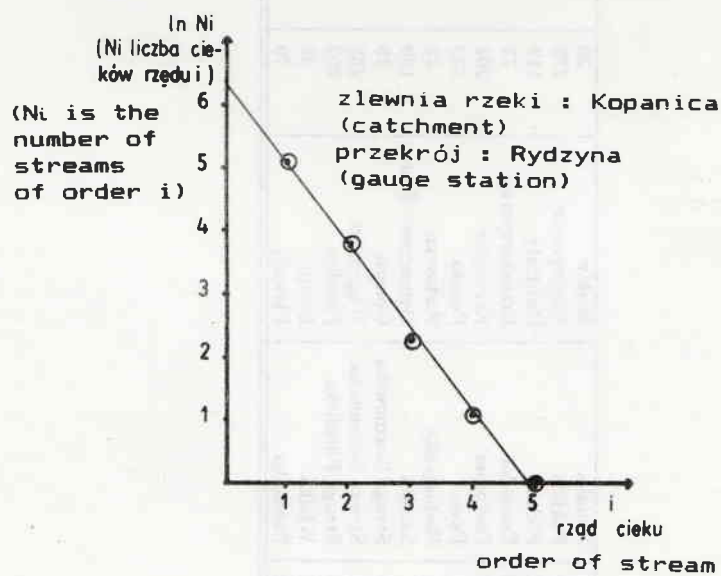
Wartości wymiaru fraktalnego i parametrów fizycznogeograficznych wybranych zlewni  
 Values of fractal dimension and morphometric parameters in the selected catchments

Lp. No. (-)	Rzeka River (-)	Przekrój Gauge station (-)	Powierzchnia zlewni Catchment area $A$ ( $\text{km}^2$ )	Gęstość sieci rzecznej Hydrographic network density $ND$ ( $\text{km}/\text{km}^2$ )	Średni z minimalnych odpływów jednostkowych Specific discharge -min. $SNq$ ( $1/\text{s} \cdot \text{km}^2$ )	Wskaźnik liczby cieków (bifurkacji) Bifurcation ratio $R_B$ (-)	Wskaźnik długości cieków Length ratio $R_L$ (-)	Wymiar fraktalny sieci rzecznej River network fractal dimension $D$ (-)
1	Cienica	Kuźnica Głogowska	65	0,5	1,08	3,79	2,01	1,90
2	Cybina	Antoninek	171	1,0	1,11	3,76	2,12	1,77
3	Czarna Woda	Sępólno	199	0,8	0,60	3,86	2,34	1,59
4	Dąbrówka	Dąbrówka Kościelna	7	0,7	0,32	3,00	2,01	1,57
5	Dojca	Obra	266	1,5	1,35	3,62	2,01	1,84
6	Flinta	Ryczywół	276	1,0	0,58	3,51	2,01	1,79
7	Gąsawka	Żnin	148	1,0	1,15	3,73	2,01	1,88
8	Główna	Wierzenica	222	1,0	0,81	3,42	2,34	1,45
9	Jordanka	Strużyny	43	0,5	0,62	2,60	1,65	1,91
10	Kopanica	Rydzyna	334	1,0	0,45	3,69	2,01	1,87
11	Krępica	Stobno	103	0,4	2,04	3,72	2,59	1,38
12	Kuroch	Odolanów	169	0,8	0,65	3,40	1,82	2,04
13	Lubniewka	Rudnica	134	0,4	2,09	3,67	2,59	1,37
14	Maskawa	Dzierżnica	37	1,3	0,28	3,62	2,01	1,84
15	Miała	Chełst	292	0,6	2,77	3,73	2,46	1,46
16	Muszyńska	Muszkowo	36	1,0	0,52	3,21	1,82	1,94
17	Noteć	Łysek	306	1,0	1,01	3,50	1,92	1,93
18	Obrzyca	Lubiatów	208	0,5	0,58	3,70	2,72	1,31
19	Ołoboczek	Dzikarnia	25	0,8	1,61	4,71	3,67	1,19

20	Orlinka	Skalów	20	0,6	0,05	3,00	1,75	1,96
21	Paklica	Międzyrzecz	279	0,8	1,51	3,39	1,86	1,97
22	Pichna	Rożdżały	119	0,8	1,60	3,63	2,46	1,43
23	Pomorka	Brzyskorzystew	72	1,3	0,13	3,55	1,92	1,95
24	Postomia	Krzeszyce	202	0,4	3,02	5,38	4,06	1,20
25	Powa	Posoka	332	0,8	0,63	4,38	2,72	1,48
26	Radoszynka	Radoszyn	25	1,2	0,08	3,05	1,82	1,86
27	Samica	Dymaczewo Stare	180	1,3	0,78	4,37	3,00	1,34
28	Struga Dormowska	Gorzyń	45	0,7	0,62	2,81	1,73	1,88
29	Struga Golaniecka	Wągrowiec	232	1,0	0,43	4,65	3,00	1,40
30	Struga Potulicka	Potulice	202	1,0	0,30	3,66	1,93	1,97
31	Wielka	Bardo	28	1,2	0,32	3,73	2,23	1,65
32	Żabianka	Plewnia	79	0,6	0,76	3,79	2,23	1,67

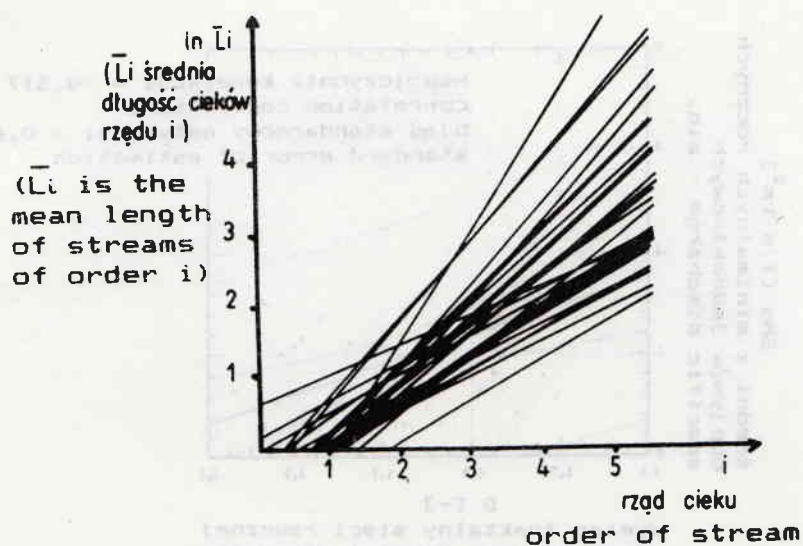


Ryc. 1. Zależności  $\ln N_i(i)$  dla badanych zlewni  
Fig. 1. The functions  $\ln N_i(i)$  for investigated catchments

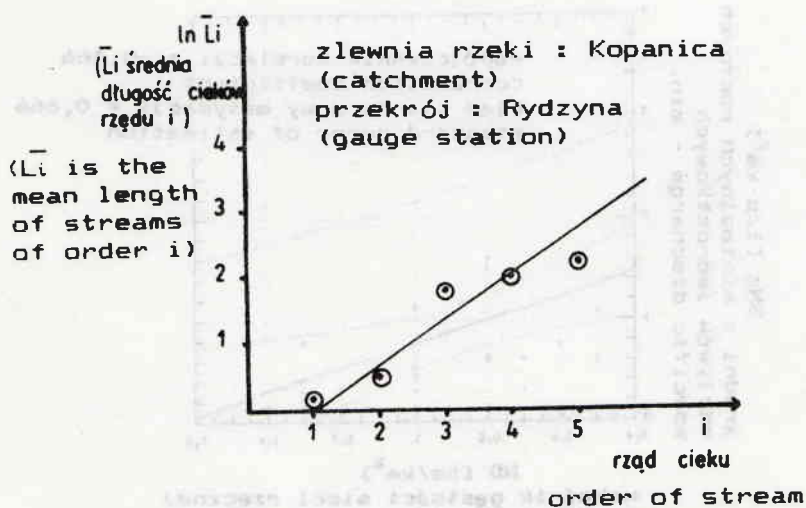


Ryc. 2. Przykładowy przebieg zależności  $\ln N_i(i)$   
Fig. 2. Example of function  $\ln N_i(i)$

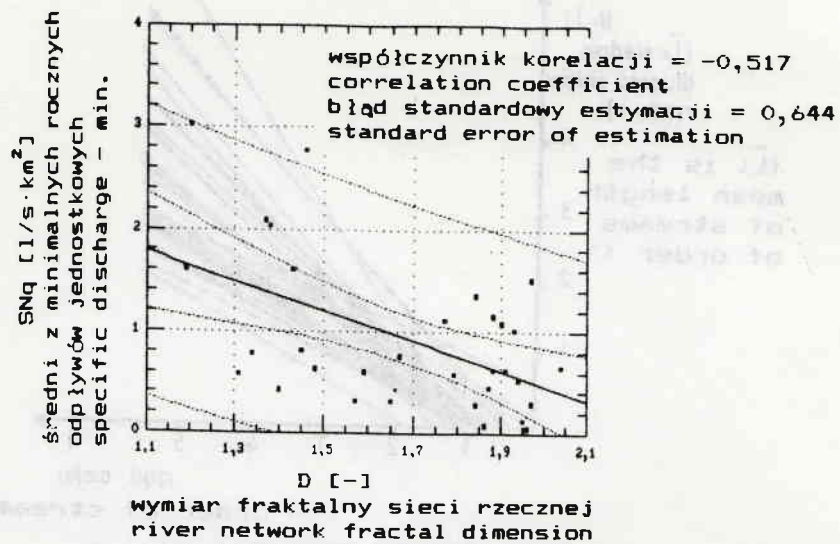
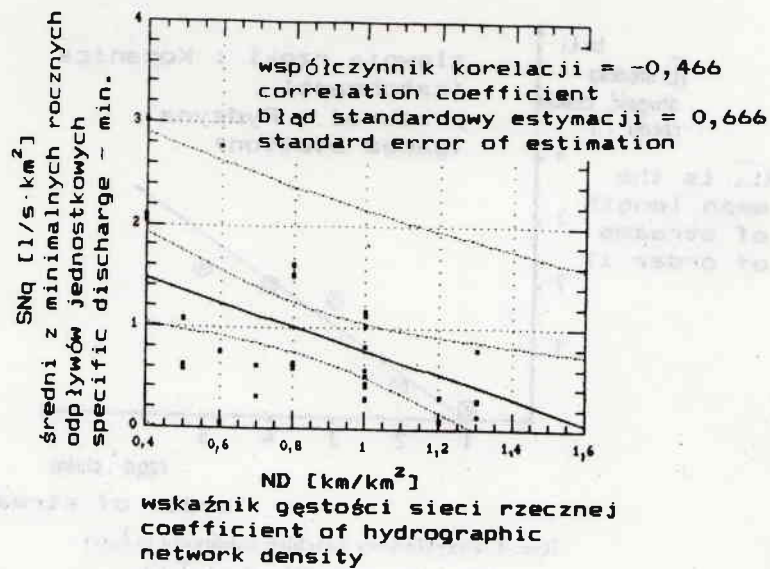




Ryc. 3. Zależności  $\ln \bar{L}_i(i)$  dla badanych zlewni  
Fig. 3. The functions  $\ln \bar{L}_i(i)$  for investigated catchments



Ryc. 4. Przykładowy przebieg zależności  $\ln \bar{L}_i(i)$   
Fig. 4. Example of function  $\ln \bar{L}_i(i)$

Ryc. 5. Zależność regresyjna  $SNq(D)$  dla badanych zlewniFig. 5. The regression  $SNq(D)$  for investigated catchmentsRyc. 6. Zależność regresyjna  $SNq(ND)$  dla badanych zlewniFig. 6. The regression  $SNq(ND)$  for investigated catchments

nie wzoru na wymiar fraktalny sieci rzecznej, zestawiono obliczone wymiary fraktalne 32 małych zlewni Wielkopolski oraz porównano związki wymiaru fraktalnego i gęstości sieci cieków z wybraną charakterystyką hydrologiczną –  $SNq$ .

Standardowe parametry morfometryczne zlewni rzecznych są powiązane z charakterystykami hydrologicznymi zlewni nizinnych zwykle na granicy istotności statystycznej (Miler 1994), dlatego wiąże się duże nadzieje z zastosowaniem fraktali do opisu cech zlewni.

### Literatura

- Eagleson P.S. (1970): *Dynamic hydrology*. McGraw – Hill Book Comp., New York.
- Feder J. (1988): *Fractals*. Plenum, New York.
- Kudrewicz J. (1993): *Fraktale i chaos*. WNT, Warszawa.
- Liu T. (1992): Fractal structure and properties of stream networks. *Wat. Res. Res.*, 28, 11: 2981-2988.
- Magnuszewski A. (1990): Wymiar fraktalny jako parametr morfometryczny sieci rzecznych małych zlewni nizinnych. *Prz. geof.*, 35, 3-4: 189-194.
- Magnuszewski A. (1993): Wymiar fraktalny współczesnych sieci rzecznych. *Prz. geof.*, 38, 2: 121-130.
- Mandelbrot B.B. (1983): *The fractal geometry of nature*. Freeman, New York.
- Miler A. (1994): Modelowanie matematyczne zdolności retencyjnych małych zlewni nizinnych. *Rocz. AR Pozn. Rozpr. nauk.* 258.
- Nikora V. (1991): Fractal structures of river plan forms. *Wat. Res. Res.*, 27, 6.
- Pierański P. (1992): *Fraktale od geometrii do sztuki*. OWN, Poznań.
- Podział hydrograficzny Polski. 1980. Cz. 2. IMGW, Warszawa.
- Tarboton D.G., Bras R.L., Rodriguez-Iturbe I. (1988): The fractal nature of river networks. *Wat. Res. Res.*, 24, 8: 1317-1322.

### FRACTAL DIMENSION OF RIVER NETWORKS IN SMALL CATCHMENTS OF WIELKOPOLSKA REGION

#### Summary

This paper studies the fractal dimensions of river networks in the catchments of the Wielkopolska region. The definitions of fractal and fractal dimension, fractal properties are presented. An original method to define formula of river network fractal dimension is worked out. Relationship among calculated the fractal dimensions of river networks (D), the coefficients of hydrographic network density (ND) and minima of specific discharges (SNq) in the catchments of the Wielkopolska region are examined. The hydrological implications of the fractal dimensions of river networks are also discussed.

#### Literature

Bratton C.R. (1977) *Systems in Biology*. Springer - Verlag Berlin, New York.

Bratton C.R. (1981) *Systems in Biology*. Springer - Verlag Berlin, New York.

Kolmogorov A.N. (1937) *Foundations of the Theory of Probability*. Moscow, Fizmatgiz.

Li H. (1982) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1982) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1983) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1984) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1985) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1986) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1987) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1988) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1989) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1990) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1991) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1992) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1993) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1994) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1995) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1996) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1997) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1998) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (1999) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2000) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2001) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2002) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2003) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2004) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2005) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2006) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2007) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2008) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2009) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2010) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2011) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2012) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2013) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2014) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2015) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2016) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2017) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2018) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2019) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.

Marshall J.C. (2020) *Fractal Geometry and Probability*. John Wiley & Sons, New York.